Revista Rumos da História, Vitória-ES, n. 11, v. 2,
janeiro/julho de 2021- ISSN 2359-4071

Os diferentes métodos para resolver equações polinomiais e suas aplicações no cálculo de taxas efetivas de juros

The different methods to solve polynomial equations and their applications in the calculation of effective compound interest

Graziela Musso Bucher Piekarz (Graduanda Ifes)
Lorena Ripardo Ferreira da Conceição (Graduanda Ifes)
Mariana Zumach (Graduanda Ifes)
Matheus Leppaus Nickel (Graduando Ifes)
Euclésio Rangel Waiandt (Mestre/Professor Ifes)

Resumo

Ao efetuarmos uma compra a prazo em prestações fixas e periódicas, o valor da prestação é calculado pela fórmula

$$P = \frac{C(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1},$$

onde P, C, i e n correspondem, respectivamente, aos valores da prestação, da dívida, da taxa de juros e do número de prestações. Trata-se de um resultado muito simples para determinar a prestação conhecendo os outros valores, mas, se o resultado procurado for a taxa de juros, a tarefa torna-se um pouco mais difícil, pois neste caso chega-se a uma equação polinomial de grau $n+1$. Neste trabalho, além de mostrar como surge a equação polinomial em questão, serão expostos também alguns métodos para resolvê-las, passando pelas fórmulas para resolver equações quadráticas e cúbicas até chegarmos ao método de Newton-Raphson para resolver uma equação qualquer e aplicarmos o resultado ao cálculo da taxa de juros.

Palavras-chave: Equação polinomial. Juros compostos. Matemática Financeira.

Abstract

When making a installment purchase in fixed and periodic installments, the installment value is formed by the formula

$$P = \frac{C(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1},$$

where P, C, i and n correspond, respectively, to the installment, debt, interest rate and number of installments.It is a very simple result to determine the installment knowing the other values, but if the result sought is the interest rate the task becomes a little more difficult, because in this case a polynomial equation of degree $n+1$ is arrived at. In this work, in addition to showing how the polynomial equation in question arises, some methods to solve them will also be exposed, going through the formulas to solve quadratic and cubic equations until we reach the Newton-Raphson method to solve any equation and apply the result the interest rate calculation.
Keywords: Polynomial equation. Compound Interest. Financial Mathematics.

1 INTRODUÇÃO

A presente pesquisa tem como foco principal analisar quais tipos de fórmulas de equações polinomiais podem ser usadas para se calcularem as taxas efetivas de juros, que é um dos objetos de estudo da matemática financeira.

Este trabalho está dando mais foco à matemática voltada à área financeira. Segundo Puccini (1977), a matemática financeira visa a realizar cálculos nos fluxos de caixa, fazendo uso das taxas de juros para obter valores equivalentes, fazendo com que a tomada de decisão seja mais assertiva.

Na matemática financeira temos uma fórmula para calcular o valor de uma prestação dada:

$$P = \frac{C(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1},$$

onde $\boldsymbol{C}$ é o valor do pagamento à vista, n é o número de prestações e i é a taxa de juros utilizada. Parcelando uma compra de R$ 1000,00 em 10 prestações mensais com juros de 2% ao mês, por exemplo, o valor da prestação corresponde a

$$P = \frac{C(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{1000 \cdot 1{,}02^{10} \cdot 0{,}02}{1{,}02^{10} - 1} = \frac{24{,}3798883998951426048}{0{,}2189944199947571302 4} = \text{R\$ } 111{,}33.$$

A aplicação da fórmula pode se tornar complicada quando temos que encontrar a taxa de juros, pois nesta situação teremos uma equação polinomial. Se a equação obtida for de 2° grau o problema será resolvido pela fórmula de Bháskara. Se for de 3° grau teremos a fórmula de Tartaglia/Cardano, e para as de 4° grau existe o processo de Ferrari. Já para as de grau maior do que quatro não existe uma fórmula como essas e para resolvê-las precisamos de outro método. No que segue vamos mostrar como podemos usar o método de Newton-Raphson para resolver o problema.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A Fórmula de Bhaskara para equações de 2° grau

A fórmula de Bhaskara é um método para se resolverem equações polinomiais do segundo grau, que carrega o nome de seu descobridor, o matemático Acharya Bhaskara (1.114 a 1.185).

> Essa fórmula consiste em fazer uso apenas de seus coeficientes para encontrar as raízes de uma equação do 2° grau e fundamentou-se na ideia de buscar uma forma de reduzir o grau da equação do 2° para o 1° através da extração das raízes quadradas (GARBI, 2009, p. 23).

A forma geral da equação do 2° grau é:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Nesta fórmula temos o coeficiente **a** que é o coeficiente quadrático, **b** é o coeficiente linear e o **c** é o coeficiente constante.

Abaixo temos a fórmula de Bhaskara, que, na verdade, não foi deduzida por Acharya Bhaskara, mas sim pelos babilônios e em seguida pelos hindus, porém esta fórmula imortalizou seu nome e é usada para calcular as equações do 2° grau até os dias de hoje.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como então resolver equações do segundo grau com a fórmula de Bhaskara? Para se resolver uma equação do segundo grau basta encontrar os valores de x que fazem com que a equação seja igual a zero. Existem três etapas para se resolver essa equação

1° etapa: Para calcular as raízes de uma equação do segundo grau, primeiramente, tem que calcular o valor numérico de Δ:

- Se o delta for menor que zero, a equação não possuirá resultados reais, pois não existe raiz quadrada real de um número negativo.
- Se o delta for maior que zero, possui dois resultados distintos reais.
- Se o delta for igual a zero, a equação possui apenas um resultado real ou possui dois resultados iguais.

2° etapa: Basta substituir os valores de Δ e dos coeficientes da equação do segundo grau na fórmula.

3° etapa: Para calcular as raízes da equação devem ser realizados dois cálculos: o primeiro para o número que seja positivo, e o segundo para o número que seja negativo.

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo:

Calcular as raízes desta equação $x^2 + 12x - 13 = 0$**.**

$$a = 1, b = 12 \text{ e } c = -13$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-13) = 144 + 52 = 196$$

Tendo em mãos o valor de Delta,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{-12 \pm 14}{2}$$

$$x' = \frac{-12 + 14}{2} = 1$$

$$x = \frac{-12 - 14}{2} = -13$$

Portanto, as raízes da equação são 1 e – 13.

2.2 A Fórmula de Tartaglia/Cardano par equações de terceiro grau

Para entender como surgiu o método para se resolverem as equações de terceiro grau temos que mencionar a história e a disputa entre Tartaglia e Cardano. Girolamo Cardano nasceu na Itália no começo do século XVI, foi um grande cientista, também se dedicou a astrologia, acabou sendo acusado por heresia por ter publicado o horóscopo de Jesus Cristo. Seu livro mais conhecido é o “Ars Magna”.

Nicolò Fontana também nasceu na Itália, no começo do século XVI, sua infância foi um pouco trágica, pois sua cidade, Bréscia, foi tomada por tropas francesas. Acabou sendo gravemente ferido, e por consequência teve uma cicatriz na boca, a qual prejudicava sua fala, e é daí que vem o apelido Tartaglia, que significa gago.

Tartaglia teve grandes dificuldades para estudar, pois sua mãe não tinha dinheiro para pagar seus estudos, mas sempre buscava aprender com os poucos livros que conseguia. Enfim conseguiu seu sustento como professor de ciências em diversas cidades da Itália e ao longo de sua vida publicou diversas obras utilizando o codinome Tartaglia, e foi o primeiro a realizar cálculos na técnica da artilharia (GARBI, 2009, p. 36), mas só foi reconhecido pelas disputas com Cardano sobre as equações de 3° grau.

O primeiro a descobrir uma fórmula para resolver um tipo de equação de 3° grau foi Scipione Del Ferro, cuja fórmula resolvia as questões do tipo $x^3+ px^2+q=0$. Em seguida Tartaglia encontrou a fórmula geral do tipo $x^3+ px +q=0$.

Ao saber que Tartaglia achou a solução geral do 3° grau, Cardano pediu para que ele lhe revelasse para publicar em seu livro. Por sua vez, Tartaglia negou, mas após muitas súplicas da parte de Cardano enfim revelou a fórmula. No final Cardano acabou publicando seu livro, no qual continha a fórmula de Tartaglia. Tartaglia o denunciou, mas de nada adiantou pois a fórmula traz até hoje o nome de Cardano.

De acordo com Garbi (2009), uma equação de 3º grau em sua forma geral $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ sempre pode ser reduzida para a forma $x^3 + px + q = 0$, bastando para isso fazer a substituição de variáveis $y = x - b/3a$. A fórmula de Tartaglia se aplica especificamente à equação $x^3 + px + q = 0$, e segundo ela temos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Um pequeno exemplo tirado do livro “O Romance das Equações Algébricas” (GARBI, 2009) pode simplificar o entendimento:

“seja a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$; $p = -6$ e $q = -9$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3.$$

vemos que o resultado é 3.”

2.3 O Método de Ferrari para as equações de 4ºgrau

O **Método de Ferrari** desenvolvido pelo matemático italiano Lodovico Ferrari, nascido em Bolonha na Itália, foi desenvolvido numa época na qual era de costume dos matemáticos fazerem desafios entre eles. Foi proposta a Ferrari a seguinte equação:

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0.$$

Antes de passarmos o raciocínio de Lodovico para resolver esta questão, é importante conhecer a equação geral do quarto grau. “A equação geral do 4º grau $ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$ sempre pode ser transformada em outra do tipo $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, fazendo $y = x - b/a$ de modo a anular o termo de 3º grau” (GARBI, 2009, p. 43).

Ferrari então buscou fazer com que houvesse polinômios quadrados perfeitos dos dois lados da igualdade. “Se tal agrupamento fosse possível seriam extraídas as raízes quadradas, cair-se-ia em equações do 2° grau e o problema estaria resolvido” (GARBI, 2009, p. 43). E então equação foi escrita desta forma:

$$x^4 + (p + \alpha)x^2 + (r + \beta) = \alpha x^2 - qx + \beta)$$

Para que os dois lados desta equação sejam quadrados perfeitos é necessário que o discriminante dos dois trinômios sejam iguais a zero, o que nos leva a:

$$\alpha^3 - 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0$$

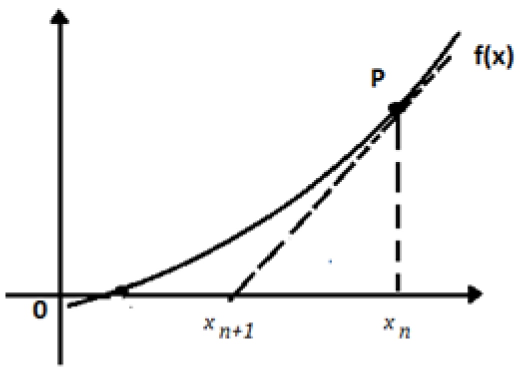
"Como as equações de 3° grau podem ser resolvidas, acha-se α**,** em seguida β e extraem-se as raízes quadradas**"** (GARBI, 2009, p. 44).

Para qualquer sinal, sendo ele positivo ou negativo, existe uma equação polinomial de 2° grau, cada uma com duas soluções. Sendo assim a fórmula oferece 4 raízes, do mesmo jeito que funciona a fórmula de Bhaskara.

2.4 O método de Newton-Raphson

Primeiramente, não é possível estabelecer uma fórmula geral para as equações de grau maior do que quatro, como provaram Galois e Abel, além do fato de que a fórmula de Tartaglia pode nos levar a um paradoxo que impossibilita a calcular suas raízes (Garbi). Daí se torna necessário outro método.

O método Newton-Raphson, desenvolvido por Isaac Newton e Joseph Raphson, visa calcular a raiz da função fazendo uso da derivada. Este método é usado para obter as raízes de qualquer função real f e parte do pressuposto de que dado um x_n qualquer, a reta que tangencia a função em $(x_n, f(x_n))$ tem uma raiz $x_n + 1$ que está entre x_n e uma raiz de f , como podemos ver na figura:



Agora, por definição temos

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}},$$

o que nos leva a

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Chega-se assim a uma sequência numérica que sempre converge para uma raiz de $f(x)$, qualquer que seja o ponto de partida x_1.

3 METODOLOGIA

Na presente pesquisa usamos a abordagem quantitativa para avaliar de forma rigorosa os métodos utilizados e permitir uma análise direta dos resultados. Foi feita uma revisão de literatura, na qual reuniram-se fontes de pesquisa para encontrar dados como artigos e textos científicos necessários para o embasamento deste trabalho. A técnica para a coleta de dados de tal embasamento foi a pesquisa em base de dados de artigos no *Google* Acadêmico, pois com esta técnica conseguimos abranger uma variedade de pesquisas. No entanto esta plataforma na qual a coleta foi feita não há nenhum tipo de critério.

Usamos este tipo de análise para diferentes métodos na aplicação de fórmulas de equações polinomiais de diferentes graus. Foi usado material bibliográfico sobre matemática financeira e matemática em geral, mas em grande parte usamos o livro “O Romance das Equações Algébricas” (GARBI, 2009), pois tinha grande parte do material que era necessário para o desenvolvimento deste trabalho, sendo devidamente citado e referenciado.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Suponhamos que uma compra de R$ 1.000,00 foi parcelada em 12 prestações mensais de R$ 100,00. Para obter a taxa de juros utilizada substituímos os valores acima na fórmula, obtendo assim:

$$P = \frac{C(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \Rightarrow 100 = \frac{1000(1+i)^{12} \cdot i}{(1+i)^{12} - 1} \Rightarrow (1+i)^{12} - 1 = \frac{1000(1+i)^{12} \cdot i}{100}.$$

Fazendo a substituição de variáveis $x = 1 + i$ temos

$$x^{12} - 1 = 10x^{12}(x-1) \Rightarrow x^{12} - 1 = 10x^{13} - 10x^{12} \Rightarrow 10x^{13} - 11x^{12} + 1 = 0.$$

chegando assim a uma equação polinomial de grau 13.

Para resolver o problema vamos considerar a função

$$f(x) = 10x^{13} - 11x^{12} + 1,$$

cujas raízes coincidem com as raízes do polinômio acima. A derivada da função é

$$f'^{(x)} = 130x^{12} - 132x^{11},$$

e aplicando a fórmula temos;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{10x_n{}^{13} - 11x_n{}^{12} + 1}{130x_n{}^{12} - 132x_n{}^{11}} = \frac{130x_n{}^{13} - 132x_n{}^{12} - 10x_n{}^{13} + 11x_n{}^{12} - 1}{130x_n{}^{12} - 132x_n{}^{11}}$$

$$= \frac{120x_n{}^{13} - 121x_n{}^{12} - 1}{130x_n{}^{12} - 132x_n{}^{11}}.$$

Tomando $x_1 = 1{,}1$ temos;

$$x_2 = \frac{120x_1{}^{13} - 121x_1{}^{12} - 1}{130x_1{}^{12} - 132x_1{}^{11}} \cong 1{,}0681369,$$

$$x_3 = \frac{120x_2{}^{13} - 121x_2{}^{12} - 1}{130x_2{}^{12} - 132x_2{}^{11}} \cong 1{,}0471467,$$

$$x_4 = \frac{120x_3{}^{13} - 121x_3{}^{12} - 1}{130x_3{}^{12} - 132x_3{}^{11}} \cong 1{,}0352813,$$

$$x_5 = \frac{120x_4{}^{13} - 121x_4{}^{12} - 1}{130x_4{}^{12} - 132x_4{}^{11}} \cong 1{,}0303015,$$

$$x_6 = \frac{120x_5{}^{13} - 121x_5{}^{12} - 1}{130x_5{}^{12} - 132x_5{}^{11}} \cong 1{,}029273,$$

$$x_7 = \frac{120x_6{}^{13} - 121x_6{}^{12} - 1}{130x_6{}^{12} - 132x_6{}^{11}} \cong 1{,}0292286,$$

$$x_8 = \frac{120x_7{}^{13} - 121x_7{}^{12} - 1}{130x_7{}^{12} - 132x_7{}^{11}} \cong 1{,}0292285,$$

$$x_9 = \frac{120x_8{}^{13} - 121x_8{}^{12} - 1}{130x_8{}^{12} - 132x_8{}^{11}} \cong 1{,}0292285.$$

Quando o resultado se repete, já se pode parar o processo. Daí temos que x ≅ 1,0292285 é uma raiz da função, e voltando ao exemplo inicial temos

$$i = x - 1 \cong 0{,}0292285 = 2{,}92285\% \text{ ao mês}.$$

Para confirmar o resultado vamos substituir o resultado na fórmula de prestação. Temos:

$$P = \frac{C(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{1000 \cdot 1{,}0292285^{12} \cdot 0{,}0292285}{1{,}0292285^{12} - 1} = \frac{41{,}29982117691107962358121889 1054}{0{,}4129983125001652367922137260 2267} =$$

$$99{,}99997560981452181693842223314 = \text{R\$ } 100{,}00.$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como mostrado anteriormente, uma única fórmula que abordamos para calcular o valor de uma prestação fez com que um grande leque de possibilidades de resolução se abrisse, fazendo com que diferentes tipos de fórmulas de resolução de equações polinomiais fossem explanadas neste trabalho, sendo elas os métodos necessários para conseguirmos ter a resolução do problema apresentado.

O presente trabalho teve enfoque na área financeira, a qual tem extrema importância para a tomada de decisões das empresas. É a matemática financeira que será usada como ferramenta para conseguir os resultados que ajudarão a empresa a ter uma tomada de decisão mais assertiva, trazendo uma maior rentabilidade e possibilitando a maximização dos resultados.

Sobre os autores

Graziela Musso Bucher Piekarz é graduanda do Curso Superior em Administração do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), campus Centro-Serrano. E-mail: graziela.noite@gmail.com.

Lorena Ripardo Ferreira da Conceição é graduanda do Curso Superior em Administração do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), campus Centro-Serrano. E-mail: lorenaripardo67@gmail.com.

Mariana Zumach é graduanda do Curso Superior em Administração do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), campus Centro-Serrano. E-mail: marianazumach@outlook.com.

Matheus Leppaus Nickel é graduando do Curso Superior em Administração do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), campus Centro-Serrano. E-mail: mnsiqueiranickel@gmail.com.

Euclésio Rangel Waiandt é professor EBTT do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), campus Centro-Serrano, licenciado em Matemática pela Faculdade da Região Serrana, especializado em Matemática pela Universidade Castelo Branco e Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo. E-mail:

euclesio@ifes.edu.br.

REFERÊNCIAS

DE ALMEIDA, E. D. C. História e Aplicações d Fórmula de Bháskara. **Caderno de Graduação** – Ciências Exatas e Tecnológicas – UNIT - Sergipe, v. 6, n. 1, p. 163, 2020.

GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

PUCCINI, A. L. **Matemática Financeira**: objetiva e aplicada. Editora Saraiva, 1977.